D I A G O N A L I S A T I O N

EXERCICE 1.

$E = R^3$ est rapporté à sa base canonique $e = \{e_1 , e_2 , e_3 \}$. f est l'endomorphisme de matrice M dans cette base :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer son polynôme caractéristique.
2. Calculer ses valeurs propres.
3. Donner une base des sous-espaces propres.
4. Décider si f est diagonalisable.
5. Donner éventuellement l'expression diagonalisée.
6. Vérifier en utilisant les matrices de changement de base.

EXERCICE 2.

Faire, pour la matrice A suivante, une étude semblable à celle de l'exercice 1 pour la matrice M :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ -5 & -7 & 5 \\ -5 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 3.

$E = R^3$ est rapporté à sa base canonique $e = \{e_1 , e_2 , e_3 \}$. f est l'endomorphisme de matrice B dans cette base :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer son polynôme caractéristique.
2. Calculer ses valeurs propres.
3. Donner une base des sous-espaces propres.
4. Décider si f est diagonalisable.
5. Donner éventuellement l'expression diagonalisée.
6. Vérifier en utilisant les matrices de changement de base.

EXERCICE 4.

Faire, pour la matrice C suivante, une étude semblable à celle de l'exercice 3 pour la matrice B :

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 5.

Soit M une matrice 5×5 réelle dont le polynôme caractéristique est :

$$P(X) = (X+1)^2 (X-2)^3.$$

1. Quelles sont les valeurs propres de M ?
2. M est-elle diagonalisable ?
3. On suppose de plus que les sous-espaces propres sont de dimension 2. Que conclure ?

EXERCICE 6.

$E = \mathbb{R}^4$ est rapporté à sa base canonique $e = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. f est l'endomorphisme de matrice M dans cette base :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Quelle est la matrice de $g = f^2$ dans la base $\{e\}$?
2. Quels sont les vecteurs propres et les valeurs propres de g ?
3. Montrer que si λ est une valeur propre de f, alors $\mu = \lambda^2$ est valeur propre de g.
4. En déduire les seules valeurs propres possibles pour f.
5. Pour un vecteur x quelconque de E, montrer que :

$$f(x) + 2x \in Ker(f - 2\, id_E)$$
$$f(x) - 2x \in Ker(f + 2\, id_E)$$

6. Construire un système de générateurs de E formé de vecteurs propres de f.
7. Diagonaliser f, soit directement, soit en utilisant ce qui précède.

EXERCICE 7.

Etudier le rang, l'image, le noyau, les sous-espaces propres, le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de l'opérateur associé à :

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Peut-on diagonaliser cette matrice ?

EXERCICE 8.

Etudier le rang, l'image, le noyau, les sous-espaces propres, le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de l'opérateur associé à :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Peut-on diagonaliser cette matrice ?

EXERCICE 9.

Etudier le rang, l'image, le noyau, les sous-espaces propres, le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de l'opérateur associé à :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Peut-on diagonaliser cette matrice ?

EXERCICE 10.

Etudier le rang, l'image, le noyau, les sous-espaces propres, le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de l'opérateur associé à :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Peut-on diagonaliser cette matrice ?

EXERCICE 11.

Etudier la matrice à n lignes et n colonnes :

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 12.

Etudier la matrice à n lignes et n colonnes :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 13.

Etudier la matrice à n lignes et n colonnes :

$$H = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

EXERCICE 14.

Soit A une matrice symétrique réelle à n lignes et n colonnes telle qu'il existe un entier k vérifiant $A^k = I_n$ .Montrer que $A^2 = I_n$.

EXERCICE 15.

Vrai ou Faux.

E est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps de nombres complexes K. Soit f un endomorphisme de E. Id est l'application identique. Donnez votre opinion sur les assertions suivantes (à justifier par une démonstration).

01. Si $f^2 = f$, alors f est inversible.
02. Si f est inversible, alors f^{-1} est diagonalisable.
03. Si f est diagonalisable, alors f est inversible.
04. Si f est inversible, alors f^2 l'est aussi.
05. Si f est diagonalisable, alors f^2 l'est aussi.
06. Si $f^2 = f$, alors f est diagonalisable.
07. Si $f^2 = Id$, alors f est inversible.
08. Si f est inversible et diagonalisable, alors f^{-1} est diagonalisable.
09. Si la matrice de f par rapport à une base $\{u\}$ est symétrique, alors f est diagonalisable.
10. Le noyau de f est un sous-espace propre de f.
11. L'image et le noyau d'un endomorphisme diagonalisable et non inversible forment une somme directe.
12. Si une matrice à éléments dans $\mathbb{R}$ est diagonalisable et inversible, son inverse est diagonalisable.
13. La somme de deux endomorphismes diagonalisables dans $\mathbb{R}^2$ n'est pas forcément diagonalisable.
14. La matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & -6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable.

D I A G O N A L I S A T I O N

EXERCICE 1.

$E = R^3$ est rapporté à sa base canonique $e = \{e_1 , e_2 , e_3 \}$. f est l'endomorphisme de matrice M dans cette base :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer son polynôme caractéristique.
2. Calculer ses valeurs propres.
3. Donner une base des sous-espaces propres.
4. Décider si f est diagonalisable.
5. Donner éventuellement l'expression diagonalisée.
6. Vérifier en utilisant les matrices de changement de base.

SOLUTION.

1°/ Polynôme caractéristique.

Le polynôme caractéristique de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

est le déterminant de la matrice $M - \lambda\, id_E$.

$$P(\lambda) = Dét\,(M - \lambda\, id_E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant la 2e ligne à la 1e :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1-\lambda & 0 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

On peut mettre – (1 + λ) en facteur dans la 1e ligne :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

On ne change pas la valeur du déterminant en retranchant la 1e colonne de la 2e.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2-\lambda & -1 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 1e ligne.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 1e colonne.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)$$

Le polynôme caractéristique de la matrice M est $P(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$

2°/ Valeurs propres.

Les valeurs propres de la matrice M sont les racines du polynôme caractéristique : –1, 1, 2. Ces racines sont toutes trois réelles et simples.

Les valeurs propres de la matrice M sont $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.

3°/ Sous-espaces propres.

Comme les valeurs propres sont réelles et distinctes, chaque sous-espace propre est de dimension 1 et engendré par un vecteur propre quelconque pour la valeur propre correspondante.
Le sous-espace propre pour une valeur propre λ est le noyau de la matrice $M - \lambda I$.

- pour la valeur propre $\lambda_1 = -1$, $M - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Réduisons cette matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajoutons la 2e colonne à la 3e, et ajoutons deux fois la 2e colonne à la 1^e

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice $M - \lambda_1 I$ est de rang 2 (les deux premières colonnes de la matrice réduite forment une famille libre de vecteurs), et son noyau a pour base par le vecteur $a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- pour la valeur propre $\lambda_2 = 1$, $M - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Réduisons cette matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustrayons de la 1e colonne la somme des deux autres, puis ajoutons à la 2e colonne la 3e :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice $M - \lambda_2 I$ est de rang 2 (les deux dernières colonnes de la matrice réduite forment une famille libre de vecteurs), et son noyau a pour base par le vecteur $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- pour la valeur propre $\lambda_3 = 2$, $M - \lambda_3 I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Réduisons cette matrice :

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustrayons de la 1[e] colonne la 2[e], puis ajoutons à la 2[e] colonne la 3[e] :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice $M - \lambda_3 I$ est de rang 2 (les deux dernières colonnes de la matrice réduite forment une famille libre de vecteurs), et son noyau a pour base par le vecteur $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4°/ Diagonalisation.

Le ***polynôme minimal*** de M est $(\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2)$. Ses racines sont réelles et d'ordre 1 : la matrice M est donc diagonalisable.

Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice des vecteurs propres $\{a_1, a_2, a_3\}$: $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On a :

$$P^{-1} M P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice P est la matrice du changement de base $[id_E, \{a\}, \{e\}]$. La relation précédente montre que l'on a :

$$[f, \{a\}, \{a\}] = [id_E, \{e\}, \{a\}][f, \{e\}, \{e\}][id_E, \{a\}, \{e\}] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme f se décompose donc en :

- une homothétie de rapport –1 (symétrie) sur l'axe défini $a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e_2 + e_3$;
- une homothétie de rapport 1 (identité) sur l'axe défini par $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = e_1 - e_2 - e_3$;
- une homothétie de rapport 2 sur l'axe défini par $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 - e_2$.

Les vecteurs de la base canonique sont donnés, en fonction de la base propre, par :

$$e_1 = a_1 + a_2$$
$$e_2 = a_1 + a_2 - a_3$$
$$e_3 = a_3 - a_2$$

EXERCICE 2.

Faire, pour la matrice A suivante, une étude semblable à celle de l'exercice 1 pour la matrice M :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ -5 & -7 & 5 \\ -5 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

SOLUTION.

1°/ Polynôme caractéristique.

$$P(\lambda) = Dét\ (A - \lambda\, I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 & -5 \\ -5 & -7-\lambda & 5 \\ -5 & -5 & 3-\lambda \end{vmatrix}.$$

On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant la 3e colonne à la 2e.

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -5 \\ -5 & -2-\lambda & 5 \\ -5 & -2-\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix}.$$

On peut mettre en facteur dans le déterminant le facteur commun – (2 + λ) de la 2e colonne.

$$P(\lambda) = -\,(2 + \lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -5 \\ -5 & 1 & 5 \\ -5 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}.$$

On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant 5 fois la 2e colonne à la 1e colonne.

$$P(\lambda) = -\,(2 + \lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}.$$

On ne change pas la valeur du déterminant en retranchant la 2e ligne de la 3e.

$$P(\lambda) = -\,(2 + \lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}.$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 1e colonne.

$$P(\lambda) = -\,(2 + \lambda)(3 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}.$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 1e colonne.

$P(\lambda) = (2 + \lambda)(3 - \lambda)(2 + \lambda)$.

$$P(\lambda) = -\,(\lambda + 2)^2\,(\lambda - 3)$$

2°/ Polynôme minimal.

Le théorème de Hamilton-Cailey donne : $(A + 2\,I)^2\,(A - 3\,I) = 0$. On a, en fait : $(A + 2\,I)(A - 3\,I) = 0$. Ceci signifie que le ***polynôme minimal*** de la matrice A est $(\lambda + 2)(\lambda - 3)$. Les racines du polynôme minimal sont simples et réelles. Il en résulte que la matrice A est diagonalisable.

3°/ Valeurs propres.

Les valeurs propres de la matrice A sont les racines de son polynôme caractéristique : $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = 3$. Le ***spectre*** de A est $\{-2\ ;\ 3\}$.

4°/ Vecteurs propres.

- Le sous-espace propre relativement à la valeur propre $\lambda_1 = -2$ est le noyau de la matrice

$$A + 2\,I = 5\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Réduisons cette matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajoutons la 3e colonne à la 1e et à la 2e :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que la matrice $A + 2\,I$ est de rang 1, et que les vecteurs $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de son noyau. On peut donc prendre les vecteurs a_1 et a_2 comme base du sous-espace propre pour la valeur propre $\lambda_1 = -2$.

- Le sous-espace propre relativement à la valeur propre $\lambda_1 = 3$ est le noyau de la matrice

$$A - 3\,I = 5\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Réduisons cette matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Retranchons de la 1e colonne, la somme des deux autres, puis ajoutons à la 2e colonne la 3e :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que la matrice $A - 3\,I$ est de rang 2, et que le vecteur $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ forme une base de son noyau. On peut donc prendre le vecteur a_3 comme base du sous-espace propre pour la valeur propre $\lambda_2 = 3$.

5°/ Diagonalisation.

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ une matrice de vecteurs propres de A. Son inverse est $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$P^{-1}\,A\,P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ -5 & -7 & 5 \\ -5 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

C'est la matrice diagonale des valeurs propres de la matrice A. La matrice A est donc diagonalisable, ce qui résulte aussi du fait qu'il existe une base formée de vecteurs propres.

EXERCICE 3.

$E = R^3$ est rapporté à sa base canonique $e = \{e_1 , e_2 , e_3 \}$. f est l'endomorphisme de matrice B dans cette base :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer son polynôme caractéristique.
2. Calculer ses valeurs propres.
3. Donner une base des sous-espaces propres.
4. Décider si f est diagonalisable.
5. Donner éventuellement l'expression diagonalisée.
6. Vérifier en utilisant les matrices de changement de base.

SOLUTION.

1°/ Polynôme caractéristique.

$$P(\lambda) = Dét\,(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 1e colonne :

$$P(\lambda) = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)^2 + (1-\lambda) = (1-\lambda)[(3-\lambda)(1-\lambda) + 1]$$

$$P(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

$$\boxed{P(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2}$$

2°/ Polynôme minimal.

Le théorème de Hamilton-Cailey donne : $(B - I)(B - 2I)^2 = 0$. On a : $(B - I)(B - 2I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc le polynôme minimal de la matrice B est le polynôme $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$. Les racines du polynôme minimal sont réelles, mais ne sont pas simples. Il en résulte que la matrice B n'est pas diagonalisable.

3°/ Valeurs propres.

Les valeurs propres de la matrice B sont les racines de son polynôme caractéristique : 1 et 2. Le spectre est l'ensemble $\{1 ; 2\}$.

4°/ Vecteurs propres.

- Les vecteurs propres pour la valeur propre $\lambda_1 = 1$ forment le noyau de la matrice $B - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  Réduisons cette matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Retranchons de la 1e colonne la somme des deux autres ; retranchons de la 3e colonne, la 2e :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que la matrice $B - I$ est de rang 2 et que son noyau, de dimension 1, est engendré par le vecteur propre

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- Les vecteurs propres pour la valeur propre $\lambda_2 = 2$ forment le noyau de la matrice $B - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Réduisons cette matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Retranchons de la 1e colonne la 2e , puis retranchons de la 2e colonne la 3e:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que la matrice $B - 2I$ est de rang 2 et que son noyau, de dimension 1, est engendré par le vecteur propre

$$a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5°/ Diagonalisation.

Comme $E = \mathbb{R}^3$ n'est pas somme directe de sous-espace propres, la matrice B n'est pas diagonalisable. On peut cependant la triangulariser en prenant, pour compléter la famille $\{a_1 , a_2\}$ de vecteur propres en une base de E, un vecteur a_3 dans l'image de $B - I$ mais n'appartenant pas au noyau de $B - 2I$, par exemple, le vecteur $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

6°/ Triangularisation.

Soit $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice des vecteurs de la famille $a = \{a_1 , a_2 , a_3\}$. Comme la famille a est une base de E, la matrice P est inversible, son inverse est $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et l'on a :

$$P^{-1} B P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le résultat n’est pas une matrice diagonale, mais une matrice dont la restriction au sous-espace engendré par les vecteurs $\{a_2 , a_3 \}$ est triangulaire.

EXERCICE 4.

Faire, pour la matrice C suivante, une étude semblable à celle de l'exercice 3 pour la matrice B :

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

SOLUTION.

1°/ Polynôme caractéristique.

$$P(\lambda) = Dét\,(C - \lambda\, I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -1-\lambda & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}.$$

On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant la 3e colonne à la 2e et à la 4e.

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ -4 & 1-\lambda & -1-\lambda & 1-\lambda \\ -2 & 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

On peut mettre en facteur $(1 - \lambda)$ dans la 2e colonne et dans la 4e colonne.

$$P(\lambda) = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -1-\lambda & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

On ne change pas la valeur du déterminant en retranchant la 2e ligne de la 3e.

$$P(\lambda) = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -1-\lambda & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 2e colonne.

$$P(\lambda) = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & -1-\lambda & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

On ne change pas la valeur du déterminant en retranchant la 3e ligne de la 2e.

$$P(\lambda) = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ -2 & -\lambda & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 3e colonne.

$$P(\lambda) = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 1e colonne.

$P(\lambda) = (1 - \lambda)^2 (-\lambda (3 - \lambda) + 2) = (\lambda - 1)^2 (\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (\lambda - 1)^3 (\lambda - 2)$

$$\boxed{P(\lambda) = (\lambda - 1)^3 (\lambda - 2)}$$

2°/ Polynôme minimal.

Le théorème de Hamilton-Cailey donne : $(C - I)^3 (C - 2I) = 0$. Le produit $(C - I)(C - 2I)$ est nul, donc le polynôme minimal de la matrice C est $(\lambda - 1)(\lambda - 2)$. Ses racines sont réelles et simples. Il en résulte que :

1. la matrice C est diagonalisable,
2. il existe une base formée de vecteurs propres.
3. la matrice $C - 2I$ est de rang 3 ; son noyau, sous-espace propre pour la valeur propre 2, est de dimension 1, c'est l'image de la matrice $C - I$: $Im(C - 2I) = Ker(C - I)$
4. la matrice $C - I$ est de rang 1 : son noyau, sous-espace propre pour la valeur propre 1, est de dimension 3, c'est l'image de la matrice $C - 2I$: $Im(C - I) = Ker(C - 2I)$.
5. $\mathbb{R}^4 = Ker(C - 2I) \oplus Ker(C - I)$

3°/ Valeurs propres.

Les valeurs propres de la matrice C sont les racines du polynôme caractéristique $P(\lambda)$: $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$. Le spectre de C est $\{1 ; 2\}$.

4°/ Vecteurs propres.

- $(C - I) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On peut la réduire de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajouter à la 1e colonne 2 fois la 2e, ajouter à la 2e colonne la 3e, ajouter à la 4e colonne la 3e :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que la matrice $C - I$ est de rang 1. Son noyau a pour base les vecteurs :

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ces vecteurs sont vecteurs propres pour la valeur propre triple 1.

Son image a pour base le vecteur $a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ce vecteur est vecteur propre pour la valeur propre simple 2.

- La famille $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ forme une base de E constituée de vecteurs propres. $E = \mathbb{R}^4$ est somme directe de sous-espaces propres de dimension 1.

5°/ Diagonalisation.

Comme il existe une base formée de vecteurs propres, la matrice *C* est diagonalisable. Soit *P* la matrice des vecteurs propres $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Comme la famille $a = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ est une base, la matrice *P* est la matrice de changement de base :

$$P = [id_E, \{a\},\{e\}]$$

Cette matrice est inversible, son inverse est :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et l'on a :

$$P^{-1} C P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

C'est la matrice diagonale des valeurs propres. Cette diagonalisation montre que l'endomorphisme *f* de matrice *C* sur la base canonique de $\mathbb{R}^4$ peut se décomposer en :

— application identique dans le sous-espace propre engendré par les vecteurs $\{a_1, a_2, a_3\}$,

— homothétie de rapport 2 dans le sous-espace propre engendré par le vecteur a_4.

EXERCICE 5.

Soit M une matrice 5×5 réelle dont le polynôme caractéristique est :

$$P(X) = (X+1)^2 (X-2)^3.$$

1. Quelles sont les valeurs propres de M ?
2. M est-elle diagonalisable ?
3. On suppose de plus que les sous-espaces propres sont de dimension 2. Que conclure ?

SOLUTION.

1°/ Valeurs propres.

La matrice M a, par hypothèse, pour polynôme caractéristique : $P(\lambda) = (\lambda+1)^2 (\lambda-2)^3$. Les valeurs propres de la matrice M sont les racines du polynôme caractéristique, ce sont donc les nombres -1 et 2. La valeur propre -1 est d'ordre de multiplicité 2, la valeur propre 2 est d'ordre de multiplicité 3. La matrice M possède donc un sous-espace propre pour la valeur propre -1 et un sous-espace propre pour la valeur propre 2.

2°/ Diagonalisation.

Cependant le polynôme caractéristique ne permet pas de conclure quand au caractère diagonalisable ou non de la matrice M. Pour que la matrice M soit diagonalisable, il faudrait que le polynôme minimal de la matrice M soit

$$P_u(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-2)$$

de telle sorte que la matrice $(M + I)$ soit de rang 3 et la matrice $(M - 2I)$ de rang 2. Dans ce cas, le noyau de la matrice $(M + I)$, c'est-à-dire le sous-espace propre relativement à la valeur propre -1, serait de dimension 2 et le noyau de la matrice $(M - 2I)$, c'est-à-dire le sous-espace propre relativement à la valeur propre 2, serait de dimension 3.

3°/ Dimension des sous-espaces propres.

La matrice M n'est diagonalisable que si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre correspondant est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre dans le polynôme caractéristique de la matrice.

Dans le cas où les sous-espaces propres sont tous deux de dimension 2, la dimension du sous-espace propre relatif à la valeur propre -1 est égale à l'ordre de multiplicité de cette valeur propre dans le polynôme caractéristique, de sorte que la restriction de M à ce sous-espace propre est diagonalisable et sa diagonalisée comportera uniquement des -1 sur la diagonale.

La dimension du sous-espace propre relatif à la valeur propre 2, par contre, n'est pas égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre 2 dans le polynôme caractéristique et la restriction de M au noyau de la matrice $(M + I)^2$ conservera une partie triangulaire.

Le polynôme minimal de la matrice M est $(\lambda+1)^2 (\lambda-2)^2$ et il est possible de trouver une base de $\mathbb{R}^5$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme de matrice M dans la base canonique prend la forme :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 6.

$E = \mathbb{R}^4$ est rapporté à sa base canonique $e = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. f est l'endomorphisme de matrice M dans cette base :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Quelle est la matrice de $g = f^2$ dans la base $\{e\}$?
2. Quels sont les vecteurs propres et les valeurs propres de g ?
3. Montrer que si λ est une valeur propre de f, alors $\mu = \lambda^2$ est valeur propre de g.
4. En déduire les seules valeurs propres possibles pour f.
5. Pour un vecteur x quelconque de E, montrer que :
$$f(x) + 2\,x \in Ker\,(f - 2\,id_E)$$
$$f(x) - 2\,x \in Ker\,(f + 2\,id_E)$$
6. Construire un système de générateurs de E formé de vecteurs propres de f.
7. Diagonaliser f, soit directement, soit en utilisant ce qui précède.

SOLUTION.

1°/ Carré de la matrice *M*.

Si f est l'endomorphisme de matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, l'endomorphisme $g = f^2$ a pour matrice dans la base canonique le carré M^2 de la matrice M.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4\,I.$$

$$\boxed{M^2 = 4\,I.}$$

Cette relation montre que l'on a : $(M - 2\,I\,)(M + 2\,I\,) = 0$, donc le polynôme minimal de la matrice M est :

$$P_u\,(X) = (X - 2)(X + 2)$$

2°/ Valeurs propres du carré de *M*.

Les valeurs propres de M^2 sont les racines du polynôme caractéristique $(X - 4)^4$ de M^2. Il y en a une seule, 4, d'ordre de multiplicité 4.

La matrice M^2 a une seule valeur propre, 4.

3°/ Valeurs propres de la matrice *M*.

Soit λ une valeur propre de M. Pour tout vecteur propre x relativement à cette valeur propre on a $f\,(x) = \lambda\,x$, donc $g\,(x) = f\,(\,f\,(x)) = f\,(\lambda\,x) = \lambda\,f\,(x) = \lambda^2\,x$. Il en résulte que $\mu = \lambda^2$ est valeur propre de g, donc de la matrice M^2 et que x est vecteur propre pour cette valeur propre.
Comme la seule valeur propre de M^2 est 4, les valeurs propres de M vérifient $\lambda^2 = 4$. Les seules valeurs propres possibles de M sont donc -2 et 2.
On a déjà observé que le polynôme minimal de la matrice M est

$$P_u\,(X) = (X - 2)(X + 2)$$

Les racines du polynôme minimal de M sont aussi des racines du polynôme caractéristique de M, de sorte que les deux valeurs -2 et 2 sont des racines du polynôme caractéristique de M : ce sont toutes deux des valeurs propres de M. Comme ce sont les seules valeurs possibles pour les valeurs propres, on en conclue :

Les valeurs propres de la matrice M sont -2 et 2.

4°/ Sous-espaces propres.

Pour tout vecteur x de E, on a :

$$(f - 2\, id_E)(f(x) + 2x) = (M - 2I)(M + 2I)\,x = 0$$
$$(f + 2\, id_E)(f(x) - 2x) = (M + 2I)(M - 2I)\,x = 0$$

puisque $(M - 2I)(M + 2I) = (M + 2I)(M - 2I)\,x = 0$.
d'où les relations :

$$f(x) + 2x \in Ker\,(f - 2\, id_E)$$
$$f(x) - 2x \in Ker\,(f + 2\, id_E)$$

Ces relations montrent que l'image de $(f + 2\, id_E)$ est dans le noyau de $(f - 2\, id_E)$ et inversement, l'image de $(f - 2\, id_E)$ est dans le noyau de $(f + 2\, id_E)$.
Considérons alors, par exemple, la matrice $M - 2I$. On peut réduire cette matrice pour calculer son rang. On arrivera à une matrice comportant un certain nombre de colonnes de zéros qui définissent le noyau de $(f - 2\, id_E)$, c'est-à-dire le sous-espace propre pour la valeur propre 2. Les autres colonnes donnent l'image de $(f - 2\, id_E)$, c'est-à-dire le sous-espace complémentaire du sous-espace propre pour la valeur propre 2. Ce sous-espace est le noyau de $(f + 2\, id_E)$, c'est-à-dire le sous-espace propre pour la valeur propre -2.

5°/ Base de vecteurs propres.

Comme le polynôme minimal de la matrice M ne comporte que des racines simples, la matrice M est diagonalisable et l'on peut trouver une base formée de vecteurs propres. Pour déterminer une telle base, réduisons la matrice $M - 2I$.

$$M - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustraire la 1e colonne de la 4e. Ajouter la somme de la 1e et de la 3e colonnes à la 2e.

↓ ↓

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que :

- La matrice $M - 2I$ est de rang 2 : son image est de dimension 2, son noyau est de dimension 2.
- On peut prendre pour vecteurs propres relativement à la valeur propre 2 les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- On peut prendre pour vecteurs propres pour la valeur propre -2 les vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Les valeurs propres -2 et 2 sont toutes deux des valeurs propres doubles. Le polynôme caractéristique de la matrice M est donc $P(\lambda) = (\lambda^2 - 4)^2 = (\lambda - 2)^2 (\lambda + 2)^2$.

Les vecteurs $a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de vecteurs propres.

6°/ Diagonalisation de la matrice *M*.

Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice formée des vecteurs propres. $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$P^{-1} M P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice obtenue est diagonale, avec, sur la diagonale, les valeurs propres avec leurs ordres de multiplicité.

EXERCICE 7.

Etudier le rang, l'image, le noyau, les sous-espaces propres, le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de l'opérateur associé à :

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Peut-on diagonaliser cette matrice ?

SOLUTION.

1°/ Réduction de la matrice *A*.

Réduisons la matrice *A*.

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajouter la 1e colonne à la 2e et à la 3e.

↓ ↓

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplier par –2 la 1e colonne. Multiplier par –1 la 2e colonne. Retrancher la 2e colonne de la 1e.
Echanger la 1e et la 2^e colonnes.

↓ ↓

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que :

- La matrice *A* est de rang 3 : son image est $\mathbb{R}^3$, son noyau est {0}.
- La matrice *A* est inversible et son inverse est $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2°/ Polynôme caractéristique.

$$P(\lambda) = Dét\,(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -0{,}5-\lambda & -0{,}5 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}5-\lambda & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 3e ligne.

$$P(\lambda) = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -0{,}5-\lambda & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\,[\,(\lambda - 0{,}5)(\lambda + 0{,}5) - 0{,}5^2\,]$$

$$P(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2 \times 0{,}5^2) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 0{,}5)$$

$$P(\lambda) = -(\lambda + \frac{\sqrt{2}}{2})(\lambda - \frac{\sqrt{2}}{2})(\lambda - 1)$$

3°/ Valeurs propres.

La matrice A a trois valeurs propres simples distinctes, $-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1$.

4°/ Polynôme minimal.

Comme le polynôme caractéristique est produit de facteurs de premier degré distincts, ces facteurs forment aussi le polynôme minimal de la matrice, c'est-à-dire le polynôme unitaire de degré minimal tel que $P_u(A) = 0$.

$$P_u(\lambda) = (\lambda + \frac{\sqrt{2}}{2})(\lambda - \frac{\sqrt{2}}{2})(\lambda - 1)$$

5°/ Vecteurs propres.

Les trois valeurs propres sont réelles et distinctes. Les sous-espaces propres sont donc de dimension 1, leur somme est directe et égale à $\mathbb{R}^3$.

- Pour vecteur propre relativement à la valeur propre $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, on peut prendre n'importe quelle combinaison linéaire non nulle des colonnes de la matrice

$$(A - \frac{\sqrt{2}}{2} I)(A - I) = A(A - I) - \frac{\sqrt{2}}{2}(A - I) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

par exemple 2 fois la différence entre la 1e et la 2e colonnes :

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Pour vecteur propre relativement à la valeur propre $\frac{\sqrt{2}}{2}$, on peut prendre n'importe quelle combinaison linéaire non nulle des colonnes de la matrice

$$(A + \frac{\sqrt{2}}{2} I)(A - I) = A(A - I) + \frac{\sqrt{2}}{2}(A - I) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

par exemple 2 fois la différence entre la 1e et la 2e colonnes :

$$a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Pour vecteur propre relativement à la valeur propre 1, on peut prendre n'importe quelle combinaison linéaire non nulle des colonnes de la matrice

$$(A + \frac{\sqrt{2}}{2} I)(A - \frac{\sqrt{2}}{2} I) = A^2 - \frac{1}{2} I = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

par exemple le vecteur $a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6°/ Diagonalisation.

Soit P la matrice des vecteurs propres,

$$P = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; P^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ -1 & 1+\sqrt{2} & -1-\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} ;$$

$$P^{-1} A P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 8.

Etudier le rang, l'image, le noyau, les sous-espaces propres, le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de l'opérateur associé à :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Peut-on diagonaliser cette matrice ?

SOLUTION.

1°/ Réduction de la matrice *B*.

Réduisons la matrice *B*.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajouter la somme de 1e et de la 2e colonnes à la 3e.

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que :

- La matrice B est de rang 2 : son image est de dimension 2, son noyau est de dimension 1.
- L'image de B est engendrée par la famille libre $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, tirée de la la matrice de gauche.
- Le noyau de B est engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, tiré de la matrice de droite.
- Si f est l'endomorphisme de matrice B dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a :

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, f(e_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f^2(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f^2(e_2) = f(e_2) - f(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \ f^2(e_3) = -f(e_1) - 2f(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 2B^2.$
- $B^2(B - 2I) = 0$
- $B(B - 2I) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$

2°/ Polynôme caractéristique.

$$P(\lambda) = Dét\,(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 1e ligne.

$$P(\lambda) = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) - (\lambda - 2) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 = -\lambda^2(\lambda - 2)$$

$$\boxed{P(\lambda) = -\lambda^2(\lambda - 2)}$$

Ce résultat confirme le résultat obtenu pour la matrice B : $B^2(B - 2I) = 0$, c'est le théorème de Hamilton-Cailey.

3°/ Valeurs propres.

Les valeurs propres de la matrice B sont les racines du polynôme caractéristique, 0 et 2. La valeur propre 0 est racine double. La valeur propre 2 est racine simple.

4°/ Polynôme minimal.

La relation $B(B - 2I) \neq 0$ confirme que le polynôme minimal de la matrice B est $\lambda^2(\lambda - 2)$.

5°/ Vecteurs propres.

- Pour vecteur propre pour la valeur propre 0, on peut prendre n'importe quelle combinaison linéaire non nulle des colonnes de la matrice $B(B - 2I) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, par exemple le vecteur $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  Le noyau de la matrice $B(B - 2I)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2, mais le noyau de B est de dimension 1, comme on l'a vu plus haut.
- Pour vecteur propre relativement à la valeur propre 2, on peut prendre n'importe quelle combinaison linéaire non nulle des colonnes de la matrice $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, par exemple le vecteur $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. La matrice B^2 est de rang 1, son noyau est de dimension 2, engendré par les vecteurs e_1 et $e_2 + e_3$, comme on le voit en faisant la somme des 2e et 3e colonnes de la matrice B^2.
- Comme le vecteur $a_2 = e_1$ est linéairement indépendant des vecteurs a_1 et a_3, on peut compléter la famille libre $\{a_1, a_3\}$ en une base de R^3 avec le vecteur $a_2 = e_1$.
- Les vecteurs propres $\{a_1, a_2, a_3\}$ forment une base de R^3, mais ce n'est pas une matrice de vecteurs propres, de sorte que la matrice B n'est pas diagonalisable.

6°/ Triangularisation.

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, la matrice de la base a. $P^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$P^{-1} B P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice obtenue comporte sur la diagonale les valeurs propres de B avec leur ordre de multiplicité : double pour 0, simple pour 2.

Dans le sous-espace de base $\{a_1 , a_2 \}$, la restriction de l'endomorphisme f défini par la matrice B n'est pas diagonal, il a pour matrice sur $\{a_1 , a_2 \}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: pour un $x = x_1 a_1 + x_2 a_2$ du plan engendré par a_1 et a_2 ,

$$B x = x_2 a_1 .$$

Dans le sous-espace de base a_3 , la restriction de l'endomorphisme f défini par la matrice B est une homothétie de rapport 2.

$$\mathbb{R}^3 = Ker\ B \oplus \mathbb{R}\, e_1 \oplus Ker\ (B - 2\ I)$$

EXERCICE 9.

Etudier le rang, l'image, le noyau, les sous-espaces propres, le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de l'opérateur associé à :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Peut-on diagonaliser cette matrice ?

SOLUTION.

1°/ Déterminant.

$\begin{vmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 12 - 14 = -2 \neq 0$. La matrice C est inversible. 0 n'est pas valeur propre. La matrice C est de rang 3, son image est $\mathbb{R}^3$ tout entier, son noyau est réduit à 0.

2°/ Polynôme caractéristique.

$$P(\lambda) = Dét\,(C - \lambda\, I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 7 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

On peut développer le déterminant par rapport à la première colonne :

$P(\lambda) = -\lambda\,(\lambda - 4)(\lambda + 2) + (-14 - 7\,\lambda + 12) = -\lambda\,(\lambda^2 - 2\,\lambda - 8) - 2 - 7\,\lambda = -\lambda^3 + 2\,\lambda^2 + \lambda - 2$

$P(\lambda) = -\lambda^2\,(\lambda - 2) + (\lambda - 2) = (\lambda - 2)(1 - \lambda^2) = -(\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2)$

$$\boxed{P(\lambda) = (\lambda - 2)(1 - \lambda^2)}$$

3°/ Valeurs propres.

Les valeurs propres de la matrice C sont les racines du polynôme caractéristique : -1, 1, 2. Il y a trois valeurs propres réelles simples distinctes.

4°/ Vecteurs propres.

Comme les trois valeurs propres sont distinctes, il y a trois sous-espaces propres de dimension 1.

$(C - I\,)(C - 2\,I\,) = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 30 \\ -1 & -1 & 6 \\ -2 & -2 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Sous-espace propre pour $\lambda_1 = -1$: $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$(C + I\,)(C - 2\,I\,) = \begin{pmatrix} -9 & 9 & 18 \\ -3 & 3 & 6 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Sous-espace propre pour $\lambda_2 = 1$: $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$(C + I\,)(C - I\,) = \begin{pmatrix} -8 & 16 & 12 \\ -4 & 8 & 6 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Sous-espace propre pour $\lambda_3 = 2$: $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5°/ Diagonalisation.

Les vecteurs $a_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, forment une base. Dans cette base, la matrice de l'endomorphisme f, de matrice C dans la base canonique, est diagonale car $f(a_1) = -a_1$, $f(a_2)=a_2$, $f(a_3)=2a_3$.

$$[f,\{a\},\{a\}] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 9 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 6 \\ 3 & -3 & -6 \\ -4 & 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 9 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 10.

Etudier le rang, l'image, le noyau, les sous-espaces propres, le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de l'opérateur associé à :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Peut-on diagonaliser cette matrice ?

SOLUTION.

1°/ Déterminant.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 0$$ car la 1[e] et la 4[e] colonnes sont proportionnelles.

2°/ Polynôme caractéristique.

$$P(\lambda) = Dét\,(D - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ -4 & 0 & 8 & 2-\lambda \end{vmatrix}.$$

Développons par rapport à la 2[e] colonne :

$$P(\lambda) = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 4 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -4 & 8 & 2-\lambda \end{vmatrix}.$$

Développons par rapport à la 3[e] colonne :

$$P(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 4 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)(2-\lambda)^2$$

$$\boxed{P(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2}$$

3°/ Valeurs propres.

Les valeurs propres de la matrice D sont les racines du polynôme caractéristique : 0, 1, 2 (racine double).

4°/ Vecteurs propres.

$$D\,(D - I)(D - 2\,I) = 0$$

Donc le polynôme minimal de la matrice D est $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$.

$$(D - I)(D - 2\,I) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -8 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$ est vecteur propre pour la valeur propre 0.

Réduisons la matrice D.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 8 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajouter 2 fois la 4e colonne à la 1e. Retrancher la 2e colonne de la 4e.

↓ ↓

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que la matrice D est de rang 3. Son noyau, qui est le sous-espace propre pour la valeur propre 0, est de dimension 1, donc la vecteur a_1 forme à lui seul une base du sous-espace propre pour la valeur propre 0.

$D\ (D - 2I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une base du sous-espace propre pour la valeur propre 1.

$D\ (D - I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 8 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $a_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ forment une base du sous-espace propre pour la valeur propre 2, qui est de dimension 2.

5°/ Diagonalisation.

Comme il existe une base $a = \{a_1 , a_2 , a_3 , a_4 \}$ formée de vecteur propres, la matrice D est diagonalisable :

$$[\, f ,\{a\},\{a\}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice du changement de base est :

$$[id_E ,\{a\},\{e\}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ceci traduit les formules :

$a_1 = e_1 + 2\ e_4$
$a_2 = e_2$
$a_3 = e_2 + e_4$
$a_4 = 2\ e_1 + e_3$

On a alors :

$e_2 = a_2$
$e_4 = a_3 - e_2 = a_3 - a_2$
$e_1 = a_1 - 2\ e_4 = a_1 - 2\ (a_3 - a_2)$
$e_3 = a_4 - 2\ e_1 = a_4 - 2\ (a_1 + 2\ a_2 - 2\ a_3)$

$$[id_E ,\{e\},\{a\}]= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = [id_E ,\{a\},\{e\}]^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 11.

Etudier la matrice à n lignes et n colonnes :

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

SOLUTION.

La matrice F, à n lignes et n colonnes, est de rang 1. Son noyau est donc de dimension $n - 1$. et a pour base la famille $\{e_2 - e_1 , e_3 - e_1 , \dots , e_n - e_1 \}$. Dans la base $a = \{e_1 , e_2 - e_1 , e_3 - e_1 , \dots , e_n - e_1 \}$, la matrice de l'endomorphisme f de matrice F dans la base canonique est donnée par les images des vecteurs de base :

$f(e_1) = e_1 + e_2 + \dots + e_n = n\, e_1 + (e_2 - e_1) + \dots + (e_n - e_1)$

$f(e_i - e_1) = 0$

$$[f, \{a\}, \{a\}] = \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est $P(\lambda) = (n - \lambda)(-\lambda)^{n-1}$

Les valeurs propres de f sont donc 0 (valeur propre d'ordre $n - 1$) et n, valeur propre simple.

La relation :

$$f(e_1) = n\, e_1 + (e_2 - e_1) + \dots + (e_n - e_1)$$

donne

$$f(f(e_1)) = f(ne_1) + f(e_2 - e_1) + \dots + f(e_n - e_1) = n\, f(e_1)$$

et cette relation montre que le vecteur non nul :

$$f(e_1) = n\, e_1 + (e_2 - e_1) + \dots + (e_n - e_1) = e_1 + e_2 + \dots + e_n$$

est vecteur propre pour la valeur propre n.

Dans la base $b = \{e_1 + e_2 + \dots + e_n , e_2 - e_1 , e_3 - e_1 , \dots , e_n - e_1 \}$, la matrice de l'endomorphisme f de matrice F dans la base canonique est diagonale :

$$[f, \{b\}, \{b\}] = \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

et la matrice du changement de base est :

$$[\, id_E , \{b\}, \{e\}] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Son inverse est la matrice des composantes des e_i sur la base b :

$b_1 - (b_2 + \dots + b_n) = n\, e_1$

$e_1 = \frac{1}{n} b_1 - \frac{1}{n} b_2 - \dots - \frac{1}{n} b_n$

$e_i = b_i + e_1 = b_i + \frac{1}{n}(b_1 - b_2 - \dots - b_n) = \frac{1}{n} b_1 - \frac{1}{n} b_2 - \dots + \frac{n-1}{n} b_i - \dots - \frac{1}{n} b_n$

$$[\, id_E , \{e\}, \{b\}] = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}$$

Diagonalisation.

$$\frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 12.

Etudier la matrice à n lignes et n colonnes :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

SOLUTION.

Remarques générales.

G est une matrice réelle symétrique. Son déterminant est $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$, comme on le voit par récurrence :

$Dét(G_1) = 1$

$Dét(G_n) = (-1)^n \, Dét(G_{n-1})$

On remarque aussi que $G^2 = I$.

Soit f l'endomorphisme de matrice G dans la base canonique. Le changement de base $a_i = e_{n+1-i}$, soit

$$[id_E, \{a\}, \{e\}] = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = G$$

donne :

$$f(a_i) = f(e_{n+1-i}) = e_i$$

d'où :

$$[f, \{a\}, \{e\}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

La relation $G^2 = I$ montre que $G^{-1} = G$, donc :

$$[id_E, \{e\}, \{a\}] = [id_E, \{a\}, \{e\}] = G$$

$$[f, \{a\}, \{a\}] = [id_E, \{e\}, \{a\}][f, \{a\}, \{e\}] = G$$

La matrice de G est invarante dans ce changement de base.

On a aussi $(G - I)(G + I) = 0$, donc le polynôme minimal de G est $P_u(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$. Les valeurs propres de G sont donc -1 et 1.

On a

$$f(e_1 + e_2 + \ldots + e_n) = e_1 + e_2 + \ldots + e_n,$$

donc $e_1 + e_2 + \ldots + e_n$ est toujours vecteur propre pour la valeur propre 1.

Polynôme caractéristique et valeurs propres.

1er cas : n est pair, $n = 2k$.

Dans ce cas, il n'y a pas de 1 sur la diagonale de G. Le polynôme caractéristique de G est :

$$P(\lambda) = Dét(G - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix}$$

On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant λ fois la dernière colonne à la première :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-\lambda^2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix}$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 1e colonne, puis le déterminant restant par rapport à la 1e ligne :

$$P_n(\lambda) = (-1)^n (1-\lambda^2) \times (-1)^{n-1} P_{n-2}(\lambda) = -(1-\lambda^2) P_{n-2}(\lambda).$$

Avec $P_2(\lambda) = (\lambda^2 - 1) = -(1-\lambda^2)$, il vient par récurrence :

$$P_n(\lambda) = (-1)^k (1-\lambda^2)^k = (\lambda+1)^k (\lambda-1)^k$$

Les valeurs propres de G sont donc -1 et 1, avec, pour chacune un ordre de multiplicité égal à $k = \frac{n}{2}$.

2e cas : *n* est impair, *n* = 2 *k* + 1.

Dans ce cas, il y a un 1 sur la diagonale de G.

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\lambda & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix}$$

On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant à la 1e colonne λ fois la dernière colonne :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\lambda & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-\lambda^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix}$$

Développons le déterminant par rapport à la 1e colonne, puis le déterminant restant par rapport à la 1e ligne :

$$P_n(\lambda) = (-1)^n (1-\lambda^2) \times (-1)^{n-1} P_{n-2}(\lambda) = -(1-\lambda^2) P_{n-2}(\lambda)$$

Avec $P_1(\lambda) = (1-\lambda)$, il vient par récurrence :

$$P_n(\lambda) = (-1)^k (1-\lambda^2)(1-\lambda) = (-1)^k (1+\lambda)^k (1-\lambda)^{k+1} = -(\lambda+1)^k (\lambda-1)^{k+1}.$$

Les valeurs propres de G sont -1 et 1, -1 est d'ordre $k = \frac{n-1}{2}$, 1 est d'ordre $k+1 = \frac{n+1}{2}$.

Vecteurs propres.

En raison de la symétrie de la matrice de G, nous allons considérer les vecteurs $e_i + e_{n+1-i}$.

$$f(e_i + e_{n+1-i}) = f(e_i) + f(e_{n+1-i}) = e_{n+1-i} + e_i = e_i + e_{n+1-i}$$

Le vecteur $e_i + e_{n+1-i}$ est toujours vecteur propre pour la valeur propre 1, pour tout i de 1 à $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ (partie entière de $\frac{n}{2}$). Nous obtenons ainsi k vecteurs propres si $n = 2k$ ou si $n = 2k + 1$. A ces k vecteurs, il convient d'ajouter le vecteur d'indice central e_{k+1} lorsque n est impair : ce vecteur est invariant par la matrice G, il correspond au 1 de la diagonale de G, donc il est vecteur propre pour la valeur propre 1.

Ces k ou $k + 1$ vecteurs forment une famille libre de façon évidente car la matrice de leurs composantes sur la base canonique comporte une diagonale de 1 avec des 0 au-dessus.

Si l'on considère maintenant les vecteurs $e_i - e_{n+1-i}$, il vient :

$$f(e_i - e_{n+1-i}) = f(e_i) - f(e_{n+1-i}) = e_{n+1-i} - e_i = -(e_i - e_{n+1-i})$$

Le vecteur $e_i - e_{n+1-i}$ est vecteur propre pour la valeur propre -1, pour tout i de 1 à $\left[\frac{n}{2}\right]$.

Nous obtenons ainsi k vecteurs propres si $n = 2k$ ou si $n = 2k + 1$. Les k vecteurs obtenus forment aussi une famille libre.
Les n vecteurs ainsi définis forment une base de vecteurs propres.

Diagonalisation.

Comme il existe une base formée de vecteurs propres, la matrice G est diagonalisable, avec, sur la diagonale, k fois la valeur propre -1 et k (n pair) ou $k + 1$ (n impair) fois la valeur propre 1.

EXERCICE 13.

Etudier la matrice à n lignes et n colonnes :

$$H = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

SOLUTION.

La matrice H est une matrice symétrique. Ses valeurs propres sont donc réelles.

Déterminant.

On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant à la 1e colonne la somme des $n - 1$ autres colonnes :

$$Dét\,(H) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+(n-1)\,\beta & \beta & \cdots & \beta \\ \alpha+(n-1)\,\beta & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \alpha+(n-1)\,\beta & \cdots & \beta & \alpha \end{vmatrix}$$

On peut mettre en facteur $\alpha + (n - 1)\,\beta$ dans la 1e colonne :

$$Dét\,(H) = (\alpha + (n - 1)\,\beta) \begin{vmatrix} 1 & \beta & \cdots & \beta \\ 1 & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ 1 & \cdots & \beta & \alpha \end{vmatrix}$$

On ne change pas la valeur du déterminant en retranchant β fois la 1e colonne de chacune des $(n - 1)$ autres :

$$Dét\,(H) = (\alpha + (n - 1)\,\beta) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha-\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \alpha-\beta \end{vmatrix}.$$

On peut développer le déterminant par rapport à la 1e ligne :

$$Dét\,(H) = (\alpha + (n - 1)\,\beta)\,(\alpha - \beta)^{n-1}$$

Polynôme caractéristique.

$P(\lambda) = Dét\,(H - \lambda I)$ s'obtient en remplaçant α par $(\alpha - \lambda)$ dans le déterminant de H :

$$\boxed{P(\lambda) = (\alpha + (n - 1)\,\beta - \lambda)\,(\alpha - \beta - \lambda)^{n-1}}$$

Valeurs propres.

La matrice H a 2 valeurs propres :

— $\lambda_1 = \alpha + (n - 1)\,\beta$, d'ordre 1.
— $\lambda_2 = \alpha - \beta$, d'ordre $n - 1$.

Polynôme minimal.

$$H - (\alpha - \beta)\,I = \begin{pmatrix} \beta & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \beta & \cdots & \beta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta & \beta & \cdots & \beta \end{pmatrix}.$$

Or $H\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ est le vecteur dont les composantes sont les sommes des lignes de la matrice H , donc :

$H\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} = (\alpha + (n-1)\beta)\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$, soit $(H - (\alpha + (n-1)\beta) I)\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ et, par conséquent, comme toutes les colonnes de la matrice $H-(\alpha-\beta)I$ sont proportionnelles au vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$, le produit de matrices $(H - (\alpha + (n-1)\beta) I)(H - (\alpha-\beta) I)$ est nul. Le polynôme minimal de la matrice H est donc :

$$\boxed{P_u(\lambda) = (\lambda - (\alpha + (n-1)\beta))(\lambda - (\alpha-\beta))}$$

Vecteurs propres.

Réduisons la matrice $H - (\alpha + (n-1)\beta) I = \begin{pmatrix} -(n-1)\beta & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & -(n-1)\beta & \cdots & \beta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta & \beta & \cdots & -(n-1)\beta \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} -(n-1)\beta & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & -(n-1)\beta & \cdots & \beta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta & \beta & \cdots & -(n-1)\beta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Ajouter à la 1[e] colonne la somme des $(n-1)$ autres colonnes

↓ ↓

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta & \cdots & \beta \\ 0 & -(n-1)\beta & \cdots & \beta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \beta & \cdots & -(n-1)\beta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que le vecteur $a_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ est dans le noyau de $H - (\alpha + (n-1)\beta) I$. Comme la valeur propre $(\alpha + (n-1)\beta)$ est simple, le sous-espace propre correspondant est de dimension 1 : le vecteur a_1 est donc une base du noyau de $H - (\alpha + (n-1)\beta) I$.

La matrice $H - (\alpha-\beta) I$ a toutes ses colonnes identiques. Pour $\beta \neq 0$, on voit, en soustrayant la 1[e] colonne de chacune des autres que :

— cette matrice est de rang 1,

— son noyau a pour base la famille de vecteurs $\{e_2 - e_1 , e_3 - e_1 , \ldots , e_n - e_1\}$: ces vecteurs sont donc des vecteurs propres de la matrice H pour la valeur propre $\alpha-\beta$. On note $a_i = e_i - e_1$, pour $i \geq 2$.

Diagonalisation.

Les vecteurs $\{a_1 , a_2 , \ldots , a_n\}$ forment (comme pour la matrice F) une base de R^n . Dans cette base, la matrice de l'endomorphisme f de matrice H dans la base canonique est diagonale :

$$[f,\{a\},\{a\}] = \begin{pmatrix} \alpha+(n-1)\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 14.

Soit A une matrice symétrique réelle à n lignes et n colonnes telle qu'il existe un entier k vérifiant $A^k = I_n$ .Montrer que

$$A^2 = I_n .$$

SOLUTION.

Soit A une matrice réelle symétrique à n lignes et n colonnes telle qu'il existe un entier $k > 1$ vérifiant $A^k = I_n$. A est la matrice d'une endomorphisme f de R^n. On sait qu'alors existe dans R^n une base formée de vecteurs propres. Soit $a = \{a_1 , \dots , a_n \}$ une telle base. On sait aussi que toutes les racines du polynôme caractéristique sont réelles, donc toutes les valeurs propres sont réelles. Soit λ_i ces valeurs propres, $i = 1, \dots , n$. Certaines des valeurs propres peuvent être multiples.

Soit $x = \sum_{i=1}^{i=n} x_i a_i$ un vecteur quelconque de R^n . On a :

$$f^k (x) = x \text{ donc } \sum_{i=1}^{i=n} x_i \lambda_i^k a_i = \sum_{i=1}^{i=n} x_i a_i$$

Comme les a_i forment une base, on obtient , pour tout i ,

$$\lambda_i^k = 1.$$

Comme λ_i est réel, c'est que $\lambda_i = \pm 1$, donc

$$\lambda_i^2 = 1.$$

On a alors :

$$f^2 (x) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \lambda_i^2 a_i = \sum_{i=1}^{i=n} x_i a_i = x$$

d'où $f^2 = id_E$ et

$$A^2 = I_n .$$

EXERCICE 15.

Vrai ou Faux.

E est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps de nombres complexes K. Soit f un endomorphisme de E. Id est l'application identique. Donnez votre opinion sur les assertions suivantes (à justifier par une démonstration).

01. Si $f^2 = f$, alors f est inversible.
02. Si f est inversible, alors f^{-1} est diagonalisable.
03. Si f est diagonalisable, alors f est inversible.
04. Si f est inversible, alors f^2 l'est aussi.
05. Si f est diagonalisable, alors f^2 l'est aussi.
06. Si $f^2 = f$, alors f est diagonalisable.
07. Si $f^2 = Id$, alors f est inversible.
08. Si f est inversible et diagonalisable, alors f^{-1} est diagonalisable.
09. Si la matrice de f par rapport à une base $\{u\}$ est symétrique, alors f est diagonalisable.
10. Le noyau de f est un sous-espace propre de f.
11. L'image et le noyau d'un endomorphisme diagonalisable et non inversible forment une somme directe.
12. Si une matrice à éléments dans $\mathbb{R}$ est diagonalisable et inversible, son inverse est diagonalisable.
13. La somme de deux endomorphismes diagonalisables dans $\mathbb{R}^2$ n'est pas forcément diagonalisable.
14. La matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & -6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable.

SOLUTION.

01. Endomorphisme idempotent.

Faux.

Soit f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = f$. On a alors $Dét\,(f^2) = Dét\,(f)$, soit :

$$(Dét\,(f))^2 = Dét\,(f)$$

d'où $Dét\,(f) = 0$ ou $Dét\,(f) = 1$. Si $Dét\,(f) = 1$, f est inversible, mais si $Dét\,(f) = 0$, f n'est pas inversible.
Par exemple, si l'on prend pour f le projecteur sur le premier axe canonique :

$$f : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, 0, \ldots, 0)$$

on a bien :

$$f^2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = f(x_1, 0, \ldots, 0) = (x_1, 0, \ldots, 0) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

donc $f^2 = f$, mais le noyau de f est l'ensemble des vecteurs dont la première composante est nulle : c'est un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$: il n'est pas réduit à 0 dès que n est strictement plus grand que 1. Comme le noyau n'est pas réduit à 0, f n'est pas inversible.

$$\boxed{f^2 = f \not\Rightarrow f \text{ est inversible}}$$

02. Endomorphisme inversible.

Faux.

L'endomorphisme inverse f^{-1} possède les mêmes sous-espaces propres que f avec pour valeurs propres les inverses des valeurs propres de f, ce qui résulte de :

$$f(x) = \lambda x \Longleftrightarrow f^{-1}(x) = \lambda^{-1} x$$

Dire que E possède une base formée de vecteurs propres pour f est donc équivalent à dire que E possède une base formée de vecteurs propres pour f^{-1}. Donc, pour un endomorphisme inversible, f^{-1} est diagonalisable si et seulement si, f est diagonalisable. Or il existe des endomorphismes inversibles non diagonalisables, par exemple une rotation d'angle θ dans $\mathbb{R}^2$, donc :

$$f \text{ inversible} \not\Longrightarrow f^{-1} \text{ diagonalisable}$$

03. Endomorphisme diagonalisable.

Faux.

Il existe des endomorphismes diagonalisables non inversibles. Exemple : le projecteur sur l'axe des x dans R^2. Sa matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice est diagonale, mais comme 0 est valeur propre (le déterminant est nul), elle n'est pas inversible.

$$f \text{ diagonalisable} \not\Longrightarrow f \text{ inversible}$$

04. Carré d'un endomorphisme inversible.

Vrai.

$$f \text{ inversible} \Longleftrightarrow Dét\, f \neq 0 \Longleftrightarrow (Dét\, f)^2 \neq 0 \Longleftrightarrow Dét\, f^2 \neq 0 \Longleftrightarrow f^2 \text{ inversible}$$

$$f \text{ inversible} \Longleftrightarrow f^2 \text{ inversible}$$

05. Carré d'un endomorphisme diagonalisable.

Vrai.

$$f(x) = \lambda x \Longrightarrow f^2(x) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda^2 x$$

Tout vecteur propre pour f est vecteur propre pour f^2. Donc s'il existe une base formée de vecteurs propres pour f, cette base est formée de vecteurs propres pour f^2. Il en résulte que :

$$f \text{ diagonalisable} \Longrightarrow f^2 \text{ diagonalisable}$$

06. Endomorphisme idempotent.

Vrai.

Un endomorphisme idempotent est, par définition, un projecteur. Tout projecteur f est diagonalisable car E est somme directe du noyau et de l'image du projecteur, et, dans le noyau, f est nul, et, dans l'image, f est l'application identique, donc

$$f^2 = f \Longrightarrow f \text{ est diagonalisable}$$

07. Endomorphisme involutif.

Vrai.

$$f^2 = Id \Longleftrightarrow f \circ f = Id \Longleftrightarrow f = f^{-1} \Longrightarrow f \text{ est inversible}$$

$$f^2 = Id \Longrightarrow f \text{ est inversible}$$

08. Endomorphisme inversible et diagonalisable.

Vrai.

Dans 3.02, nous avons vu que, pour un endomorphisme inversible, f^{-1} est diagonalisable si et seulement si, f est diagonalisable. Donc

$$f \text{ inversible et diagonalisable} \Longrightarrow f^{-1} \text{ diagonalisable}$$

09. Endomorphisme symétrique.

Faux.

On sait que toute matrice réelle symétrique est diagonalisable, mais que dire des matrices complexes symétriques ? L'extension des matrices réelles symétriques au cas complexe est constitué par les matrices hermitiennes (c'est-à-dire dont la transposée est égale à la conjuguée) : toute matrice hermitienne est diagonalisable, et, plus généralement, tout endomorphisme normal est diagonalisable (un endomorphisme est normal si, et seulement si, il commute avec son adjoint ; tout endomorphisme unitaire, c'est-à-dire inversible et de déterminant 1, est normal ; tout endomorphisme hermitien est normal)

Considérons par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$. C'est une matrice symétrique. Son polynôme caractéristique est $-\lambda\,(2-\lambda) - i^2 = \lambda^2 - 2\,\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$. Il y a donc une seule valeur propre $\lambda = 1$. On a :

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de rang 1 et son noyau a pour base le vecteur $e_1 - i\,e_2$. Le sous-espace propre pour la valeur propre 1, est de dimension 1, différente de l'ordre de multiplicité 2 de la valeur propre dans le polynôme caractéristique : donc la matrice A n'est pas diagonalisable, et on a construit un exemple de matrice symétrique non diagonalisable.

$$f \text{ symétrique} \not\Longrightarrow f \text{ diagonalisable}$$

10. Noyau d'un endomorphisme.

Faux.

$$x \in Ker\, f \Longleftrightarrow f\,(x) = 0 \Longleftrightarrow f\,(x) = 0.x$$

On voit donc que, pour que $Ker\, f$ soit sous-espace propre pour la valeur propre 0, il faut et il suffit qu'il ne soit pas réduit à 0, donc il faut et il suffit que $Dét\, f = 0$.

$$Ker\, f \text{ sous-espace propre de } f \Longleftrightarrow Dét\, f = 0$$

Comme il existe évidement des endomorphismes dont le déterminant n'est pas nul, il existe des endomorphismes dont le noyau n'est pas un sous-espace propre.

11. Somme directe de l'image et du noyau d'un endomorphisme.

Vrai.

$x \in Ker\, f \cap Im\, f \Longrightarrow (f\,(x) = 0$ et $(\exists\, y \in E)(x = f\,(y)\,))$

f diagonalisable $\Longrightarrow$ Il existe une base $a = \{a_1 , \ldots , a_n \}$ formée de vecteurs propres

$y \in E \Longrightarrow y = \Sigma_i\ y_i\, a_i$

$x = f\,(y) = \Sigma_i\ y_i\ f\,(a_i\,) = \Sigma_i\ y_i\ \lambda_i\, a_i \Longrightarrow f\,(x) = \Sigma_i\ y_i\ \lambda_i\, f\,(a_i\,) = \Sigma_i\ y_i\ \lambda_i^{\,2}\, a_i$

$f\,(x) = 0 \Longrightarrow (\forall i\,)(y_i\ \lambda_i^{\,2} = 0) \Longrightarrow (\forall i\,)(y_i = 0$ ou $\lambda_i = 0) \Longrightarrow (\forall i\,)(y_i\ \lambda_i = 0) \Longrightarrow x = 0$.

L'image et le noyau de f forment donc une somme directe.

12. Inverse d'une matrice diagonalisable.

Vrai.

Soit M une matrice inversible et diagonalisable. Elle est semblable à une matrice diagonale : il existe donc une matrice P telle que :

$$M = P^{-1}\, A\, P$$

où A est une matrice diagonale, ayant pour éléments de la diagonale principale, les valeurs propres de M. Comme M est inversible, son déterminant, produit des valeurs propres, n'est pas nul, donc 0 n'est pas valeur propre : aucun élément de la diagonale principale de A n'est nul. Alors A est inversible et son inverse est la matrice diagonale dont les éléments de la diagonale principale sont les inverses des éléments de la diagonale principale de A.

$$M^{-1} = (P^{-1} A P)^{-1} = P^{-1} A^{-1} P$$

Comme la matrice A^{-1} est une matrice diagonale, la matrice M^{-1} est diagonalisable.

13. Somme de deux endomorphismes diagonalisables.

Vrai.

Considérons par exemple l'endomorphisme f_1 , de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique, et l'endomorphisme f_2 , de matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Le polynôme caractéristique de f_1 est $P_1(\lambda) = \lambda (\lambda - 1)$: f_1 a deux valeurs propres réelles distinctes, c'est un endomorphisme diagonalisable.

Le polynôme caractéristique de f_2 est $P_2(\lambda) = \lambda (\lambda - 1)$: f_2 a deux valeurs propres réelles distinctes, c'est un endomorphisme diagonalisable.

La somme $f = f_1 + f_2$ a pour matrice dans la base canonique $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est $P(\lambda) = (1 - \lambda)^2 + 1$. Il n'est jamais nul, donc f n'a pas de valeur propre réelle et n'est donc pas diagonalisable.

14. Matrice diagonalisable ?

Faux.

Le polynôme caractéristique de la matrice A est :

$$P(\lambda) = (3 - \lambda)(1 - \lambda)(-5 - \lambda) + 16(1 - \lambda) = (1 - \lambda)((3 - \lambda)(-5 - \lambda) + 16) = (1 - \lambda)(\lambda^2 + 2\lambda + 1)$$

$$P(\lambda) = -(\lambda + 1)^2 (\lambda - 1)$$

Le polynôme minimal est donné par :

$$(A + I)(A - I) \neq 0 \Longrightarrow P_u(\lambda) = (\lambda + 1)^2 (\lambda - 1)$$

La matrice $A + I$ a sa première et sa troisième colonnes proportionnelles : elle est de rang 2, le sous-espace propre pour la valeur propre -1 est de dimension 1, différente de l'ordre de multiplicité de la valeur propre -1 dans le polynôme caractéristique, donc la matrice A n'est pas diagonalisable.